Подготовка
выпускников к ЦТ:
решение некоторых
геометрических задач

Автор: заведующий кафедрой

геометрии и математического анализа

Михаил Николаевич Подоксёнов

Равнобедренные треугольники

*C*

*a*

*D*

*A*

*B*

*E*

*a*

*x*

*x*

2*x*

*F*

2*y*

*y*

*O*

Вспомним, как доказывается следующее утверждение: «Точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины».

Рассмотрим ∠*ACB*. *BE=EC* ⇒ *DF=FC=x*. При этом, *AD=DC* ⇒ *AD=*2*x*. А теперь рассмотрим ∠*CAE*.

=2 ⇒ =2.

Равнобедренные треугольники

*C*

*a*

*E*

*F*

*a*

*a*

*D*

*A*

*B*

*a*

*x*

*a*

*x*

*b*

*b*

*b*

*b*

*O*

Рассмотрим теперь более общую задачу. Отрезок *AE* делит медиану *BD* в отношении *k*:1. В каком отношении точка *E*  делит сторону *BC*? На данном рисунке *k=*3. Проведём отрезки, параллельные к *AE*, которые делят *BO* на *k* равных частей и ещё *DF*.

Рассмотрим ∠*CBD*: ==*k*.

Рассмотрим ∠*BCA*: *AD=DC* ⇒ *EF=FC*.

Итак, на отрезке *BE* мы имеем *k* равных отрезка, а на отрезке *EC* два таких же отрезка ⇒

=.

На данном чертеже *BO*:*OD*=3:1 ⇒ *BO*:*OD*=3:2.

Отметим ещё, что если стороны подобных треугольников соотносятся с коэффициентом *k*, то их площади соотносятся с коэффициентом *k*2.

Равнобедренные треугольники

***Пример* 1.** В равнобедренном треугольнике *ABC* через вершины *C* и *B* основания проведены к боковым сторонам отрезки *CD* и *BE*, которые пересекаются в точке *N*, лежащей на высоте *AP*. Точка делит высоту в отношении 3:1, считая от вершины. Найдите площадь трапеции Δ*CEBD*, если площадь Δ*ABC*  равна 100.

*C*

*D*

*B*

*A*

*E*

*D*

*x*

3*x*

*N*

***Решение*:** Как мы уже выяснили, точка *E* делит отрезок *AC* в отношении 3:2. Т.е. *AE=AC*. Следовательно, Δ*ADE*  подобен Δ*ABC*  с коэффициентом 0,6. Значит *S*Δ*ADE* *=* 0,36·*S*Δ*ABC =*36.

*SCEBD* *= S*Δ*ABC* – *S*Δ*ADE* *=* 64.

***Ответ*:** 64 см.

Задачи на трапецию

Диагонали трапеции разбивают трапецию на 4 треугольника. Треугольники *AOD* и *BOC* подобны с коэффициентом . Пусть их площади равны *S*1 и *S*2. Треугольники *AOB* и *COD* имеют равную площадь *S*.
Оказывается, что *S*=.

*C*

*B*

*S*2

*S*1

*O*

*S*

*S*

*A*

*b*

*a*

*D*

Пусть *h*1 и *h*2 – высоты треугольников *AOD* и *BOC*. Тогда

*A*

*D*

*a*

*C*

*B*

*h*2

*O*

*h*1

*b*

*S*

*S*

*S=b*·*h*1*=a*·*h*2.

Действительно,

*SACD=a*·(*h*1+*h*2),  *SAOD=a*·*h*1,

*S=SACD– SAOD=a*·(*h*1+*h*2)– *a*·*h*1.

Задачи на трапецию

***Пример* 2.** Основания трапеции *AD=*6, *BC=*3, *O* – точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника Δ*COD* равна 6. Найти высоту трапеции.

*A*

*D*

6

*C*

*B*

*h*2

*O*

*h*1

3

***Решение*:** Δ*AOD* Δ*BOC* с коэффициентом *=*2. Поэтому *S*1:*S*2*=*4, т.е.  *S*1*=*4*S*2.

*S*= ⇔ 6= ⇔ 36=4*S*22

*S*2*=*3 и *S*2*=*3·*h*2 ⇒  *h*2*=*2.

А из подобия треугольников следует, что *h*1*=*4.

*h=h*1+*h*2*=*6.

***Ответ*:** 3.

Задачи на трапецию

*A*

*C*

*B*

*D*

*O*

α/2

β/2

*A*

*B*

*E*

*x*

*y*

*hc*

*C*

∠*AOB*=90°

 *hc*=

*a*

*b*

*d*

*c*

 Свойства четырёхугольника, описанного вокруг окружности: *a*+*c*=*b*+*d.*

Для трапеции это означает, что сумма боковых сторон равна сумме оснований. Полупериметр равен сумме двух противоположных сторон: *p=a+c=b+d*.

Задачи на трапецию

*S*=*p*·*r*, *p* – полупериметр, *p=* , *r* – радиус вписанной окружности. Для трапеции, описанной вокруг окружности *p* равен сумме боковых сторон, либо сумме оснований.

***Пример* 3.** Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию равен 6, а боковая сторона делится точкой касания в отношении 1:4, считая от верхнего основания. Найти площадь трапеции.

*A*

*C*

*B*

*O*

*r*

*x*

4*x*

*E*

*D*

***Решение.***

4*x*·*x=*62, 4*x*2*=*362, *x=*3,

*AB=*5*x=*15, *p=*2*AB=*30,

*S=p*·*r=*30·6*=*180 ед2.

Задачи на смешанные фигуры

Если многогранник вписан в шар, то окружность, описанная вокруг каждой его грани, принадлежит сфере.

*O*

*N*

*S*

*O*2

*P*

*Q*

*R*

*T*

Перпендикуляр, проходящий через центр окружности, к плоскости грани проходит также и через центр сферы.

Задачи на смешанные фигуры

*E*

*O*1

*A*

*B*

*C*

*D*

*O*

*O*2

***Пример* 4.** В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной 6. Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник и она перпендикулярна плоскости основания. Найдите радиус описанного около пирамиды шара.

***Решение*:** Пусть *O* – центр шара, *O*1 и *O*2 – центры окружностей, описанных вокруг основания и вокруг перпендикулярной основанию грани. Тогда отрезки

*OO*1 и *OO*2 перпендикулярны плоскостям, в которых лежат соответствующие треугольники. Поскольку треугольники лежат в перпендикулярных плоскостях, то и эти отрезки перпендикулярны друг другу.

Точки *O*1 и *O*2 – это точки пересечения медиан. Поэтому *СO*1*=CE*.

Задачи на смешанные фигуры

*E*

*O*1

*B*

*C*

*D*

*O*

*O*2

*A*

60º

*R*

*CE=AC*·sin60°*=*6· *=*3*=*9. *СO*1*=*·9*=*6.

*OO*1*=O*1*E=CE=*3.

Теперь из прямоугольного Δ*COO*1

*R=OC==*

*==*25.

***Ответ*:** 25.

Задачи на смешанные фигуры

***Пример* 5.** Из точки *N* на поверхности шара проведены три равные хорды под углом 60° друг к другу. Найдите их длину, Если радиус шара равен 2.

*O*

*S*

*N*

*B*

*C*

*O*1

*l*

*A*

*M*

***Решение*:** Очевидно, что соединив концы хорд, мы получим правильный тетраэдр.

Пусть *O* – центр шара, *O*1 – центр основания.

*N*

*A*

*S*

*M*

*O*1

*O*

*x*

Рассмотрим сечение

шара плоскостью, проходящей через *A*, *O*1, *N*.

Δ*ANS*  прямоугольный. Пусть *AN=x*, тогда *AM=x*, *AO*1*=AM=x*. Тогда по теореме Пифагора

Задачи на смешанные фигуры

*N*

*A*

*S*

*M*

*O*1

*O*

*x*

*x*

*NO*1*===x=x* .

По свойству высоты в прямоугольном треугольнике

*AO*12*=NO*1·*SO*1 ⇒ *x*2*=x*·*SO*1.

*SO*1*=x=x*.

 *SO*1+ *NO*1*=*2*R* ⇒ *x* +*x=*4 ⇒

*x=*8.

***Ответ*:** 8.

Задачи на призму

***Пример* 6.** В правильной треугольной призме проведено сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 14, а плоскость сечения образует с плоскостью основания угол, равный 30°.

*A*

*B*

*C*

*C*1

*A*1

*B*1

30°

*D*

1) 98; 2) 196; 3) 98; 4) 196; 5) .

***Решение*:** *Sосн=a*2·sin60°*==*49.

*=*cos30° ⇒ *Sсеч=*°*=*49:*=*98.

***Ответ*:** Правильный ответ 3).

Задачи на пирамиду

*A*

*B*

*С*

*l*

*l*

*S*

*O*

ϕ

Если все боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы ϕ, то

1) высота падает в центр окружности, вписанной в основание;

2) все апофемы равны;

3) *=*cosϕ;

4) *Sбок=p*·*l*, где *p* – полупериметр
основания, *l* – апофема.

Задачи на пирамиду

*A*

*C*

*B*

*l*

*l*

*S*

*O*

α

β

***Пример* 7.** В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой *c=*12 и острым углом α*=*60°. Каждая из боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β*=*arccos. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

***Решение*: ∠***A=*60° ⇒ **∠***B=*30° ⇒ *AC==*6.

*S*Δ*ABC=AB*·*AC*·sinα*=*·12·6·*=*18.

*=*cosβ*=* ⇒ *Sбок=*β*=*18:*=*54.

***Ответ*:** 54.

Задачи на призму

*E*

*B*

*B*1

*A*

*C*

*C*1

*A*1

*F*

*G*

*H*

*K*

4

4

*L*

*M*

***Пример* 8.** Рёбра *AB*, *AC*, *BB*1 треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 попарно перпендикулярны и равны по 8. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер *AB*, *BB*1, *B*1*C*1.

***Решение*:** Процесс построения сечения показан на чертеже. Из Δ*FBE* находим *FE=*8. Далее можно догадаться, что данная пирамида – это половина куба. Если мы совместим две половинки, то сечением будет правильный шестиугольник.

Задачи на призму

*E*

*B*

*B*1

*A*

*C*

*C*1

*A*1

*F*

*G*

*H*

*K*

Поэтому его площадь проще найти, разбив его на 6 правильных треугольников. Значит, площадь исходного сечения равна площади трёх таких треугольников:

8

8

8

 *S=*3··8·8·sin60°*=*96·*=*48.